

Могући ток часа

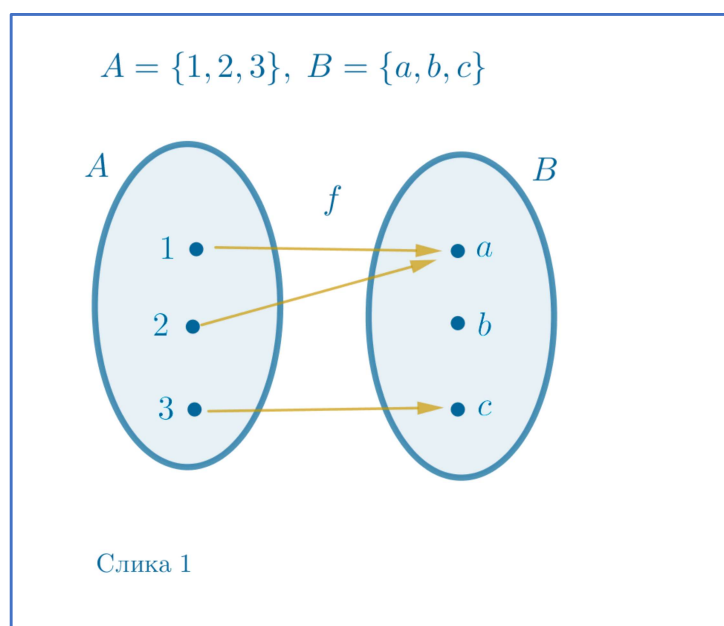
Наставник се представља ученицима.

Подсетник

Наставник уводи ученике у тему обнављањем основних појмова. Обнавља са ученицима појам функције и када је функција бијекција.

Пример 1

Испитати да ли је следећа функција бијекција.



Решење:

Најпре се подсетимо дефиниције функције, на који начин је ова функција задата, шта је њен домен а шта кодомен и када је функција бијекција.

Дефиниција.

Скуп f је функција из A у B , у ознаци $f: A \rightarrow B$, ако важе следећи услови:

- $f \subseteq A \times B$
- За свако x из A постоји тачно један елемент y из B такав да $(x, y) \in f$.

Дефиниција.

Функција $f: A \rightarrow B$ је:

- „1-1“ функција, ако је за свако $x_1, x_2 \in A$ тачна импликација $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
- „на“ функција, ако за свако $y \in B$ постоји $x \in A$ тако да је $f(x) = y$;
- бијекција, ако је „1-1“ и „на“ функција.

Функција није „1-1“, јер различитим оргиналима, овде су то 1 и 2, одговара иста слика a и такође ова функција није ни „на“, јер елемент $b \in B$ нема свој оргинал у скупу A . Дакле, функција није бијекција.

Имајући у виду да се појмови вишег степена апстракције најбоље уводе преко конкретних примера, односно да на тај начин ученици најбоље усвајају те појмове, инверзну функцију, наставник уводи на конкретном примеру.

➤ **Мотивација**

Цезарова шифра

Легенда каже да је Цезар шифровао поруке тако што је свако слово померио за три позиције у абецеди (последња слова је враћао на прва).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	...	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
↓	↓	↓								
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	...	<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>

Ово је пример једне функције, која абецеду слика у абецеду.

Како се шифрује реч DECA?

Како да дешифрујемо реч BABA?

Дакле, примећујемо да сваку реч можемо на јединствен начин да дешифрујемо и да свако слово из кодомена има свој оргинал из домена. Пресликавање уведено на овакав начин је бијекција.

Да ли постоји неки други начин шифровања који можемо да направимо?

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	...	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
↓	↓	↓								
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	...	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

Да ли можемо опет да одредимо како се шифрује реч DECA?

Да ли можемо да дешифрујемо реч BABA?

Дакле, закључујемо да овако уведена функција није „1-1“ функција, а самим тим ни бијекција. Примећујемо да бисмо увели „супротну“ функцију потребно је да полазна функција буде бијекција.

Записује на табли наслов лекције и уводи формалну дефиницију инверзне функције.

Дефиниција.

Ако је $f: A \rightarrow B$ бијективно пресликавање, онда са f^{-1} означавамо *инверзно пресликавање* пресликавању f такво да важи:

$$f^{-1}: B \rightarrow A \text{ и } (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Пример 1

Дата је функција $f(x) = 2x + 1$, $f: R \rightarrow R$. Доказати да је функција f бијекција и затим одредити њој инверзну функцију.

Решење:

- f је „1-1“ : $(\forall x_1, x_2 \in R)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Дакле, за произвољно $x_1, x_2 \in R$ претпоставићемо да

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \quad / -1$$

$$2x_1 = 2x_2 \quad / :2$$

$$x_1 = x_2$$

- f је „на“ : $(\forall y \in R)(\exists x \in R)(f(x) = y)$

Дакле, $y = 2x + 1 \in R$

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y-1}{2} \in R$$

Функција је бијекција.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}(2x + 1) = x$$

Смена: $2x + 1 = t$

$$x = \frac{t-1}{2}$$

$$f^{-1}(t) = \frac{t-1}{2}$$

Преозначавањем, добијамо $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

- Обрадом првог примера, упућује ученике у одређивање инверзне функције дате функције. Упућује их да провере за домаћи да ли су за свако x тачне једнакости $f(f^{-1}(x)) = x$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

Задатак 1

Дата је бијекција $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \frac{4x-3}{5}$. Одредити њој инверзну функцију.

Решење:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}\left(\frac{4x-3}{5}\right) = x$$

Смена: $\frac{4x-3}{5} = t \quad / \cdot 5$

$$4x - 3 = 5t$$

$$4x = 5t + 3$$

$$x = \frac{5t+3}{4}$$

$$f^{-1}(t) = \frac{5t+3}{4} \quad \text{Преозначавањем, добијамо } f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{4}.$$

Задатак 2

За функцију $f(x) = \log_2 x$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ одредити њој инверзну функцију и њихове графике представити у истом координатном систему.

Решење:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

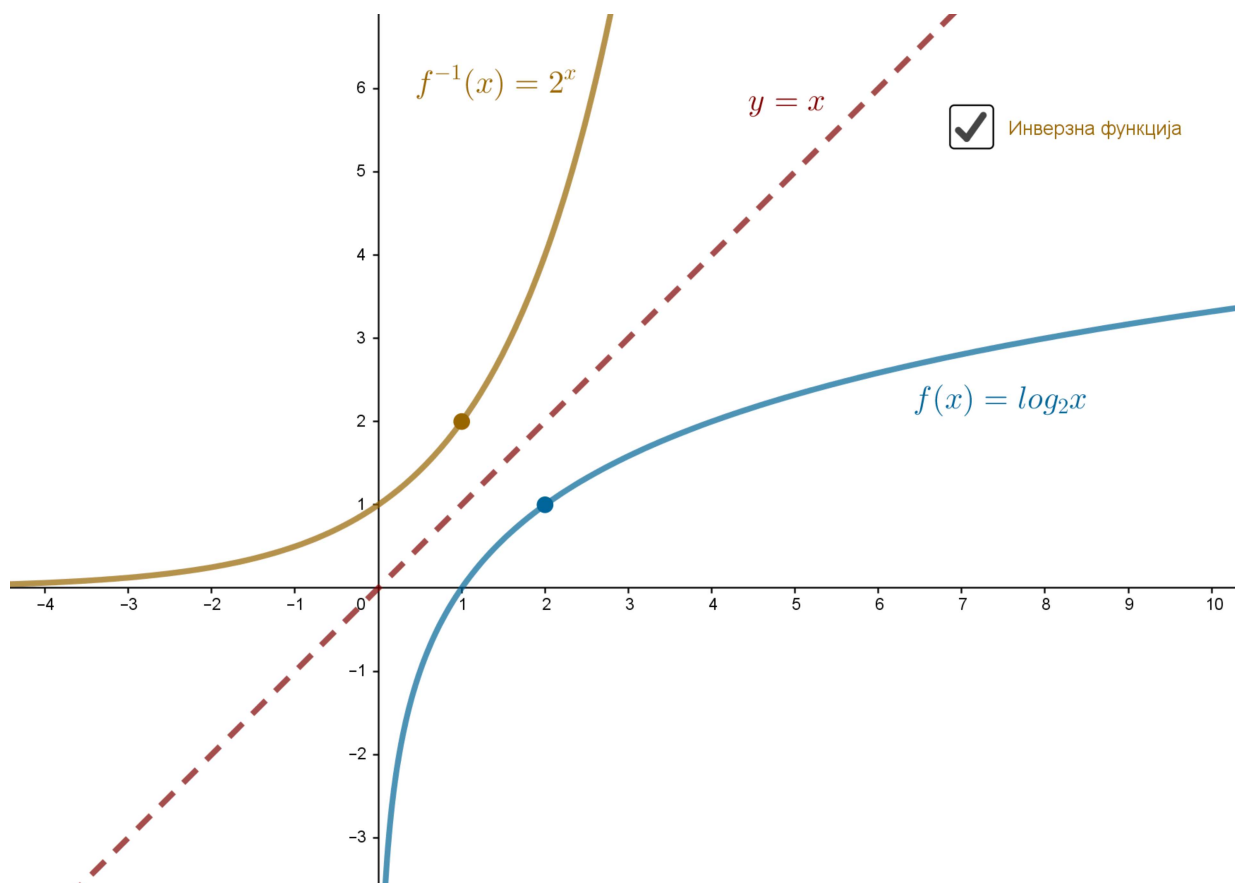
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}(\log_2 x) = x$$

Смена: $\log_2 x = t$

$$x = 2^t$$

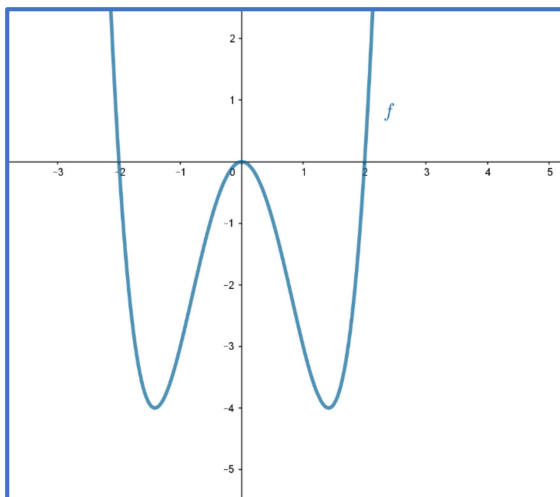
$$f^{-1}(t) = 2^t \quad \text{Преозначавањем, добијамо } f^{-1}(x) = 2^x.$$



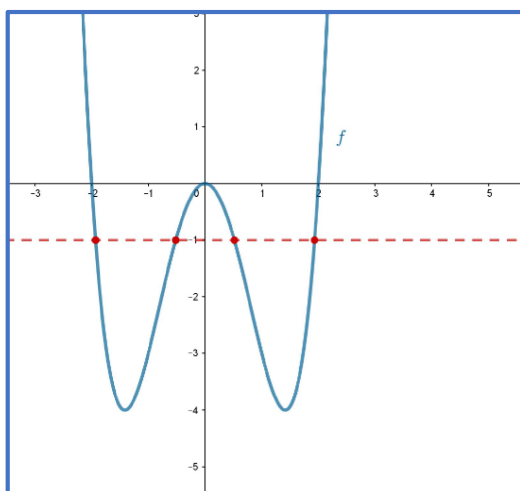
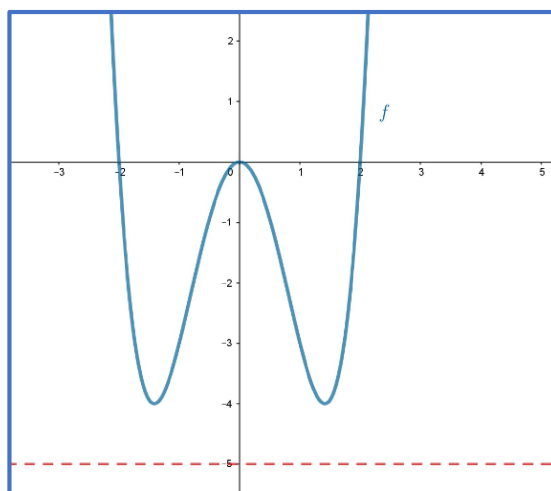
- Обрадом другог задатка, посебно истиче да су у координатном систему графици функција f и f^{-1} симетрични у односу на праву $y = x$.

Задатак 3

На основу графика дате функције $f(x) = x^4 - 4x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ утврдити да ли она има инверзну функцију.



Решење:



Функција није бијекција, па неће постојати инверзна функција.

Задатак 4

Проверити да ли функција $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ има инверзну функцију.

Решење:

- f је „1-1“ : $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\})(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Дакле, за произвољно x_1, x_2 из домена претпоставићемо да

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+4}{x_1-3} = \frac{x_2+4}{x_2-3}$$

$$\begin{aligned}(x_1 + 4)(x_2 - 3) &= (x_1 - 3)(x_2 + 4) \\ x_1 x_2 - 3x_1 + 4x_2 - 12 &= x_1 x_2 - 3x_2 + 4x_1 - 12 \\ 7x_1 &= 7x_2 \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Функција јесте „1-1“.

- f је „на“ : $(\forall y \in R)(\exists x \in R \setminus \{3\})(f(x) = y)$

$$\begin{aligned}y &= \frac{x+4}{x-3} / \cdot (x-3) \\ y(x-3) &= x+4 \\ yx-3y &= x+4 \\ yx-x &= 3y+4 \\ x(y-1) &= 3y+4 / : (y-1) \\ x &= \frac{3y+4}{y-1}, \quad y-1 \neq 0\end{aligned}$$

Дакле, функција $f: R \setminus \{3\} \rightarrow R$ није „на“, јер елемент $y = 1$ нема свој оргинал у $R \setminus \{3\}$. Закључујемо да неће имати инверзну функцију.

Напомена:

Функција $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$, $f: R \setminus \{3\} \rightarrow R \setminus \{1\}$ биће бијекција, и имаће инверзну функцију.

Завршни део часа (5 минута)	<ul style="list-style-type: none"> – Понавља када постоји инверзна функција и како је она дефинисана. – Отклања евентуалне нејасноће код ученика. <p>Домаћи рад</p> <ol style="list-style-type: none"> Дате су функције $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - 5$ и $g: R \rightarrow R, g(x) = x + 1$. <ol style="list-style-type: none"> Одредити функције $f \circ g, g \circ f$; Одредити $(f \circ g)^{-1}(2)$. Дата је функција $f(x) = \log_2(x - 1)$. Одредити њену инверзну функцију. Проверити да ли следеће функције имају инверзну функцију: <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = x^2, f: R \rightarrow R$; $f(x) = x^2, f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.
<p>Начини провере остварености исхода:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Посматрање ученичког учешћа у раду, закључивања и одговора на постављена питања наставника током часа. – Анализирање успешности ученика у решавању примера. 	
<p>Оквир за преиспитивање оствареног часа:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Да ли ми је адекватан избор начина провере остварености исхода? -Да ли сам планирао адекватне активности ученика? -Да ли је било одступања/потешкоћа приликом остваривања планираног? <p>Шта бих променио?</p>	